КВАЗИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ В КООРДИНАТАХ РИМАНА УРАВНЕНИЯ AW-RASCLE ДЛЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мингбаева А.А.

Мингбаева Азиза Абдухакимовна – преподаватель,
кафедра математического моделирования и криптоанализа,
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в этой работе рассматривается вопрос приведения к общей квазилинейной форме системы уравнений Aw-Rascle для дорожного движения, нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы* $F(\mathbf{Y})$*, вопросы вывода квазилинейной модели в координатах Римана из общей физической модели путем диагонализации матрицы* $F(\mathbf{Y})$.

Ключевые слова: *система уравнений Aw-Rascle, собственные значения, собственные вектора, гиперболическая система.*

УДК 519.633

В жидкостной парадигме моделирования дорожного движения трафик описывается в терминах двух основных макроскопических переменных состояния: плотности $\wp(t,x)$ и скорости $V(t,x)$ транспортных средств в позиции x вдоль дороги в момент времени t. Aw и Rascle предложили следующую динамическую модель дорожного движения:

$$\begin{cases} \partial_t \wp + \partial_x(\wp V) = 0 \\ (\partial_t + V\partial_x)V + (\partial_t + V\partial_x)P(\wp) + \sigma(V - V_0(\wp)) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

В этой модели первое уравнение представляет собой уравнение непрерывности, представляющее сохранение числа транспортных средств на дороге. Второе уравнение представляет собой феноменологическую модель, описывающую изменения скорости, вызванные поведением водителей. Функция $V_0(\wp)$ представляет собой монотонно убывающую зависимость между средней скоростью транспортных средств и плотностью: чем больше плотность, тем меньше средняя скорость. Параметр σ является константой релаксации[1]. Функция $P(\wp)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию плотности ($P'(\wp) > 0$), называемую давлением движения, которое выбирается так, чтобы слагаемое $(\partial_t + Vp_x)V + (\partial_t + V\partial_x)P(\wp)$ представляет динамику изменения скорости вокруг среднего $V_0(\wp)$ при изменении плотности. Использование лагранжевой производной $\partial_t + V\partial_x$ позволяет учесть изменения плотности, которые «реально» воспринимаются водителями перед ними. Теперь, умножив первое уравнение (1) на $V + P(\wp)$ и второе уравнение на $\wp$, и добавив два, получим систему двух нелинейных законов сохранения вида

$$\begin{aligned} &\partial_t \wp + \partial_x(\wp V) = 0 \\ &\partial_t(\wp V + \wp P(\wp)) + \partial_x(\wp V^2 + \wp V P(\wp)) + \sigma\wp(V - V_0(\wp)) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Приведем к общей квазилинейной форме систему (2)

$$\begin{cases} \partial_t \wp + V\partial_x \wp + \wp\partial_x V = 0 \\ \wp\partial_t V + V\partial_t \wp + \wp\partial_t P(\wp) + P(\wp)\partial_t \wp + \\ \qquad + 2V\wp\partial_x V + V^2\partial_x \wp + VP(\wp)\partial_x \wp + V\wp\partial_x P(\wp) + \wp P(\wp)\partial_x V + \sigma\wp(V - V_0(\wp)) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения $\partial_t \wp + V\partial_x \wp + \wp\partial_x V = 0$ выразим $\partial_t \wp$ и подставим во второе уравнение - $\partial_t \wp = -V\partial_x \wp - \wp\partial_x V$

$$\begin{aligned} &\wp\partial_t V + V\cdot(-V\partial_x \wp - \wp\partial_x V) + \wp\partial_t P(\wp) + P(\wp)\cdot(-V\partial_x \wp - \wp\partial_x V) + \\ &\qquad + 2V\wp\partial_x V + V^2\partial_x \wp + VP(\wp)\partial_x \wp + V\wp\partial_x P(\wp) + \wp P(\wp)\partial_x V + \sigma\wp(V - V_0(\wp)) = 0 \end{aligned}$$

Раскроем скобки

В итоге

$$\wp\partial_t V + \wp\partial_t P(\wp) + V\wp\partial_x V + V\wp\partial_x P(\wp) + \sigma\wp(V - V_0(\wp)) = 0$$

Данное выше выражение разделим на $\wp$, получим

$$\partial_t V + \partial_\wp P \cdot \partial_t \wp + V\partial_x V + V\partial_\wp P \partial_x \wp + \sigma(V - V_0(\wp)) = 0$$

Подставим $-V\partial_x \wp - \wp\partial_x V$ вместо $\partial_t \wp$ и раскроем скобки

$$\partial_t V - V\partial_\wp P\partial_x \wp - \wp\partial_\wp P\partial_x V + V\partial_x V + V\partial_\wp P\partial_x \wp + \sigma(V - V_0(\wp)) = 0$$

Получим $\partial_t V - \wp\partial_\wp P\partial_x V + V\partial_x V + \sigma(V - V_0(\wp)) = 0$

или $\partial_t V + (V - \wp P'(\wp))\partial_x V + \sigma(V - V_0(\wp)) = 0$

В общем виде система уравнений (2) придет к виду

$$\begin{cases} \partial_t \wp + V\partial_x \wp + \wp\partial_x V = 0 \\ \partial_t V + (V - \wp P'(\wp))\partial_x V + \sigma(V - V_0(\wp)) = 0 \end{cases}$$

Модель также может быть записана в общей квазилинейной форме

$$\mathbf{Y}_t + F(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_x + G(\mathbf{Y}) = 0$$

$$\mathbf{Y} \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} \wp \\ V \end{pmatrix}, \qquad F(\mathbf{Y}) \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} V & \wp \\ 0 & V - \wp P'(\wp) \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{Y}) \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(V - V_0(\wp)) \end{pmatrix}$$

Таким образом, для положительной плотности $\wp > 0$, система является гиперболической с характеристикой скорости, которые являются собственные значения $F(\mathbf{Y})$ [2].

$$\lambda_1(\mathbf{Y}) = V > \lambda_2(\mathbf{Y}) = V - \wp P'(\wp)$$

$$Det(F(Y) - \lambda E) = 0$$

$$Det\left[\begin{pmatrix} V & \wp \\ 0 & V - \wp P'(\wp) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$Det\begin{pmatrix} V - \lambda & \wp \\ 0 & V - \wp P'(\wp) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(V - \lambda)(V - \wp P'(\wp) - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = V$$

$$\lambda_2 = V - \wp P'(\wp)$$

Найдём собственные вектора матрицы $F(\mathbf{Y})$:

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} V & \wp \\ 0 & V - \wp P'(\wp) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} V & \wp \\ 0 & V - \wp P'(\wp) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \wp \\ 0 & -\wp P'(\wp) \end{pmatrix} = 0$$

$$\wp w_{11} - \wp P'(\wp) w_{12} = 0$$

$$w_{11} = P'(\wp) \qquad w_{12} = 1$$

$$\begin{pmatrix} w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} V & \wp \\ 0 & V-\wp P'(\wp) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} V & \wp \\ 0 & V-\wp P'(\wp) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V-\wp P'(\wp) & 0 \\ 0 & V-\wp P'(\wp) \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \wp P'(\wp) & \wp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\wp P'(\wp) w_{11} + 0 \cdot w_{12} = 0$$

$$\wp w_{11} + 0 \cdot w_{12} = 0$$

$$w_{11} = 0 \qquad w_{12} = (\textit{любые} \;\; \textit{числа},\ \textit{например}\ 1)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \begin{pmatrix} P'(\wp) & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Инварианты Римана находятся при помощи данного преобразования

$$\mathbf{\Omega Y}_t + \Lambda \mathbf{\Omega Y}_x + \mathbf{\Omega B Y} = 0$$

здесь, Λ - это диагональная матрица составленная из собственных чисел матрицы A, Ω - матрица собственных векторов[2] (в данном случае левых)

$$\begin{pmatrix} P'(\wp) & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \wp \\ V \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} P'(\wp) & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V-\wp P'(\wp) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \wp \\ V \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} P'(\wp) & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(V-V_0(\wp)) \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\begin{pmatrix} P(\wp)+V \\ V \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V-\wp P'(\wp) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(\wp)+V \\ V \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} P'(\wp) & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(V-V_0(\wp)) \end{pmatrix} = 0$$

координаты Римана может быть определены как $R_1 = P(\wp) + V, \quad R_2 = V$

с обратным преобразованием координат: $V = R_2, \quad \wp = P^{-1}(R_1 - R_2)$

Список литературы

1. *Bastin Georges and Coron Jean-Michel.* Stability and boundary stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. Springer International Publishing Switzerland., 2016. P. 37;
2. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 67 стр.