ПРОБЛЕМНЫЕ МЕСТА ПРИ РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЕ

Базарбаева М.К.

Базарбаева Мира Кенисовна - учитель математики,
Государственное учреждение Средняя школа № 25, г. Астана, Республика Казахстан

Аннотация: *в статье рассматриваются основные проблемы при решении иррациональных уравнений и способы их разрешения.*
Ключевые слова: *уравнение, иррациональное уравнение, корни уравнения, равносильность уравнений, возведение в степень.*

Решение иррациональных уравнений является сложной темой в школьном курсе математики, так как необходимо знать теоретический материал, а также уметь анализировать различные ситуации. Из школьного курса нам известен основной метод решения данных уравнений – это возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень [1, с. 107], который часто приводит к появлению «посторонних корней», где у ученика могут быть проблемы с проверкой корней. И, конечно же, этих знаний недостаточно при сдаче экзаменов по математике или при участии в олимпиаде. В основе большинства решений уравнений и в частности иррациональных, следует опираться на равносильность переходов, на теоремы равносильности уравнений [3, с. 40 - 45]. В этой статье рассмотрим основные способы решения иррациональных уравнений и разберем наиболее «проблемные» места при решении данных уравнений.

Самый известный вид иррационального уравнения, предлагаемый на различных экзаменах, уравнение вида:

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \qquad (1)$$

Обычно решая это уравнение в школе учащихся начнут возводить данное уравнение в квадрат, получают при этом «посторонние корни», часто забывая сделать проверку. Поэтому решить уравнение (1) лучше с помощью равносильных преобразований.

Уравнение вида $\sqrt{A(x)} = B(x)$ равносильно системе, состоящей из уравнения $A(x) = B^2(x)$ и неравенства $B(x) \geq 0$:

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Ученики иногда добавляют к данной системе еще неравенство $A(x) \geq 0$, что является лишним, так как оно автоматически выполняется.

Также следует отметить еще один вид иррационального уравнения $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$, который решается следующим образом:

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ B(x) \geq 0 (A(x) \geq 0) \end{cases} \qquad (3)$$

Стоит отметить, что в системе вторым условием проверяется одно из неравенств $B(x) \geq 0$ *или* $A(x) \geq 0$, обычно более простое. Зачастую ученики записывают оба неравенства.

Пример 1: Решить уравнение $\sqrt{x+8} = 1$

Решение: Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 8 = 1 \\ 1 \geq 0 \end{cases}$$

Неравенство $1 \geq 0$ выполняется при любых значениях x, а из уравнения следует, что $x = -7$.

Ответ: -7.

Пример 2: Решить уравнение $\sqrt{x+8} = -3$

Решение: Данное уравнение не имеет решения, так как по определению квадратный корень не может быть отрицательным числом.

Пример3: Решить уравнение $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$.

Решение: Очень часто ученики не замечают, что в левой части уравнения может быть отрицательное значение и возводят данное уравнение в степень, не преобразовывая его, что ведет к неравносильному преобразованию уравнения. Преобразуем данное уравнение к равносильному уравнению следующим образом:

$$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}. \qquad (4)$$

В уравнении (4) и в левой и в правой части неотрицательное выражение, уравнение (4) будет равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \\ 3x + 1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x + 4 \end{cases}$$

где два первых неравенства являются условием существования функций, входящих в уравнение, а третье уравнение – это результат возведения в квадрат обеих частей уравнения.

Преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq -4 \\ \sqrt{x+4} = x-2 \end{cases}$$

Данная система равносильна выражению:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x-2 \geq 0 \\ x+4 = x^2-4x+4 \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x=0 \end{cases}$$

Решая неполнное квадратное уравнение получим:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases}$$

Корнем уравнения является только $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Если в уравнении встречается некое выражение более одного раза, то возможна замена переменной, что ведет к облегчению решения уравнения

Пример 4: Решить уравнение: $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4$

Решение: Введем новую переменную $y=\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}$, отметим, что $y>0$. Тогда данное уравнение примет вид:

$$y+3\cdot\frac{1}{y}=4$$

Умножим на $y>0$

$$y^2-4y+3=0$$

Решая данное квадратное уравнение, получим $y_1=1$, $y_2=3$, которые удовлетворяют условию $y>0$. Тогда $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=1$, отсюда $x_1=\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=3$, отсюда $x_2=-\frac{3}{2}$.

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$.

Пример 5: Решить уравнение $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt{2x+9}=5$.

Решение: Введем новые переменные: $u=\sqrt[3]{x+8}$ и $v=\sqrt{2x+9}$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$u+v=5$$

Выразим u и v через x, получим

$$v^2-2u^3=2x+9-2(x+8)=-7$$

Получам систему уравнений с двумя переменными, состоящая из двух рациональных уравнений:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ v^2-2u^3=-7 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим $u=2$, отсюда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Пример 6: (1 способ) Решить уравнение: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение: Введем новые переменные:$u=\sqrt[3]{2x-1}$ и $v=\sqrt[3]{x-1}$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$u+v=1$$

Выразим u и v через x, получим:

$$u^3-2v^3=2x-1-2(x-1)=1$$

Получам систему уравнений с двумя переменными, состоящая из двух рациональных уравнений:

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^3-2v^3=1 \end{cases}$$

Отсюда, $v=0$, а $x=1$.

Ответ: $x=1$

Пример 6: (2 способ) Решить уравнение: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение: Приступая к решению данного уравнения, можно увидеть, что корнем данного уравнения является $x = 1$. Заметим, что левая часть уравнения состоит из суммы двух возрастающих функций, а значит принамает каждое свое значение один раз. В правой части функция $y = 1$, которая параллельна оси ox. Таким образом, данные функции имеют единственную точку пересечения при $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 7: Решить уравнение $-x^2 + 2x - 1 = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Решение: В данном примере возведение обеих частей в квадрат не является рациональным. Заметим, что левая часть уравнения

$$-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0$$

а т.к. как правая часть не может быть меньше нуля, а значит решение возможно, если обе части равны нулю. И левая и правая часть равны нулю при $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

На примерах рассмотрено в каких местах при решении иррациональных уравнений у учеников могут быть трудности. При решении данных уравнений использовался не только метод возведение обеих частей уравнения в квадрат, но и свойства функции $y = \sqrt{x}$, метод замены переменной.

Список литературы

1. *Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Б., Потапов М.К., Шерниязов К.* Алгебра и начала анализа. 10 - 11 классы. «Жазушы», 2002.
2. *Черкасов О.Ю.,. Якушев А.Г.* Справочник для школьников и поступающих в вузы. АСТ-ПРЕСС, 2016. 464 с.
3. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия, «ABF», 1995. 352 с.